XXIII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

отборочный тур, решения

2016

3 декабря
24 января

---

11 класс

---

1. У человека очень плохое зрение, и в результате он видит Плеяды как одно туманное пятно. Оцените видимую звездную величину этого пятна (пренебрегая поглощением света в атмосфере).

Решение (8 баллов):

Любой источник данных о звездах Плеяд (например, Википедия) позволяет обнаружить, что в скоплении есть десяток звезд, которые можно увидеть невооруженным глазом, причем ярчайшая звезда (Альциона) имеет примерно $+3^m$ величину, а остальные заполняют интервал от 3^m до 6^m.

Поскольку нам нужна только оценка, посчитаем, сколько в скоплении звезд каждой величины, округленной до целого. Мы получим следующий результат:

Величина	Звезд
$+3^m$	1
$+4^m$	5
$+5^m$	2
$+6^m$	3

Очевидно, что звезды $+5^m$ и более слабые существенной роли играть не будут, и можно считать, что интегральная звездная величина скопления обеспечивается пятью звездами $+4^m$ и еще одной $+3^m$ (которая «эквивалентна» двум с половиной звездам $+4^m$). Тем самым скопление должно светиться как 7.5 звезд $+4^m$, и, поскольку $7.5 = 2.5 \cdot 3 \approx 2.5^2$, его интегральная звездная величина должна быть примерно равной $+2^m$.

Безусловно, тот же результат (и даже с большей точностью) можно получить, собрав данные о звездах Плеяд, переведя их звездные величины в освещенности, сложив последние и вычислив интегральную звездную величину.

2. В одной книге в жанре «фэнтези» указывалось, что для Высшего вампира (в отличие от обычного вампира) солнечный свет смертельно опасен только тогда, когда Солнце пересекает горизонт. Определите широты на Земле, на которых Высший вампир в среднем в течение года меньше всего подвергается опасности. Оцените минимальное суммарное время за один год, когда Высшему вампиру необходимо будет прятаться от солнечного света.

Решение (8 баллов):

Сразу же заметим, что на тех широтах, где Солнце ежедневно восходит и заходит, наиболее благоприятным местом для проживания Высшего вампира является экватор. В самом деле, время пересечения горизонта Солнцем определяется угловой скоростью вращения Земли (которая с интересующей нас точностью является постоянной) и углом, под которым суточная параллель Солнца расположена к горизонту в данной местности. Так как на экваторе этот угол прямой, то Солнце «вертикально» выходит из-за горизонта и уходит под него, и продолжительность восхода и захода минимальна не только в среднем в течение года, но и в каждый конкретный день. Для очистки совести вспомним также про рефракцию, однако она, поднимая все объекты в окрестности горизонта, практически не влияет на время пересечения диском Солнца горизонта, поэтому здесь и далее мы ее учитывать не будем.

Сложнее становится ситуация в приполярных областях Земли. С одной стороны, в силу уже рассмотренного обстоятельства продолжительность одного восхода или одного захода там еще больше. Однако в этих областях число восходов и заходов в течение года становится меньше (поскольку есть полярные дни и полярные ночи) и, возможно, суммарное время восходов и заходов в течение года может оказаться и небольшим.

Рассмотрим для простоты случай полярного дня в северном полушарии Земли (в южном и для полярной ночи ситуация, очевидно, будет аналогичной). Для того, чтобы Солнце не заходило под горизонт в течение суток, его склонение $\delta_\odot$ должно удовлетворять условию $\delta_\odot > 90^\circ - \varphi$, где φ — широта места. Склонение Солнца меняется в течение года примерно как $\delta_\odot = \varepsilon \cdot \sin 2\pi t$, где $\varepsilon = 23^\circ.4$, а t — время в долях года, отсчитанное от момента весеннего равноденствия. Отсюда путем несложных преобразований получаем, что доля года, в течение которой Солнце восходит и заходит, составляет

$$4 \cdot \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{90^\circ - \varphi}{\varepsilon},$$

где значение арксинуса вычисляется в радианах. Заметим, что полученное выражение не очень корректно для полюсов, но, как мы увидим в дальнейшем, это не так уж страшно.

Для простоты в качестве оценки продолжительности восхода или захода на широте φ возьмем наиболее благоприятный для Высшего вампира случай — дни равноденствий. В это время суточной параллелью Солнца является экватор, и продолжительность одного восхода (например) обратно пропорциональна $\cos\varphi$. Тем самым в интересах Высшего вампира нам надо минимизировать функцию вида:

$$f(\varphi) = \left(\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{90^\circ - \varphi}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{1}{\cos\varphi}$$

Умеющие вычислять производные могут это сделать и обнаружить, что на всем интересующем нас интервале значений аргумента функция является убывающей. Те, кто не умеет или ленится, могут просто построить график функции (в любой программе построения графиков или даже вручную по точкам) и убедиться в том же самом. Следовательно, если вампиру где-то в приполярных областях и хорошо, то на полюсах.

Осталось сделать немногое. Продолжительность одного восхода (или захода) Солнца на экваторе составляет 2 минуты (так как диаметр видимого диска Солнца около полуградуса, продолжительность пересечения Солнцем горизонта можно оценить как 1/720 часть суток). За весь год накопится 4×365 минут, т.е. всего чуть более 24 часов за год. То, что восход или заход Солнца на полюсе занимает более суток, более-менее общеизвестно (а если и нет, то время восхода можно легко вычислить, учитывая, что склонение Солнца меняется в окрестности равноденствий на $1^\circ \cdot \sin\varepsilon \approx 0^\circ.4$ в сутки, а измениться оно должно на $0^\circ.5$ — размер диска Солнца), следовательно, вампиру все-таки надо жить на экваторе.[1]

3. Разность видимых звездных величин некоторого астероида в противостоянии и в западной квадратуре составляет 3^m. Определите его период обращения вокруг Солнца, считая его орбиту круговой и расположенной в плоскости эклиптики.

Решение (8 баллов):

Изобразим взаимное расположение Земли E, Солнца S и астероида в обоих положениях: противостоянии O и квадратуре Q (см. рисунок). Для более простого учета влияния фазы будем считать астероид шарообразным. Диаметр E_1E_2 перпендикулярен лучу, направленному к Земле E, а S_1S_2 перпендикулярен лучу, направленному на Солнце S.

Заметим, что $\angle S_1QE_1 = \angle EQS$. Фаза Φ определяется как отношение видимой освещенной части диаметра астероида E_2T к длине всего диаметра E_1E_2. Поэтому необходимо вычислить длину отрезка QT. Он равен произведению радиуса астероида (можно принять за единицу, т.к. он все равно сократится) на косинус $\angle EQS$. Получаем, что $\Phi = (1 + \cos\beta)/2$.

[1]Автор признателен за идею задачи А. Глушановскому, автору книги «Дорога в маги», а также книжному шкафу в Юношеской Математической Школе СПбГУ, где соответствующая книга была обнаружена автором задачи во время перерыва между занятиями.

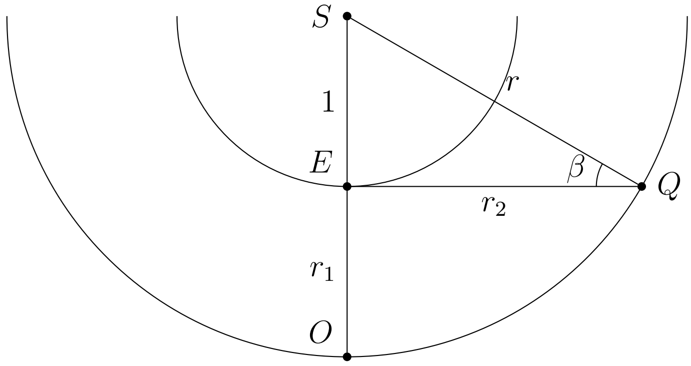

Рис. 1: Взаимное расположение Земли и астероида

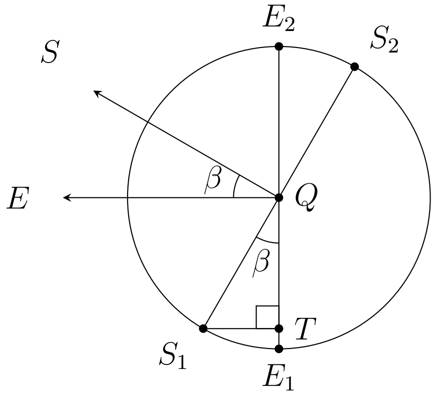

Рис. 2: К вычислению фазы

Астероид движется по круговой орбите, следовательно, количество энергии от Солнца он получает всегда одинаковое. Его альбедо будем считать постоянным, значит солнечный свет будет отражаться всегда одинаково. Тогда изменение освещенности от астероида будет обусловлено лишь изменением расстояния до наблюдателя и изменением фазы: $E \sim \frac{\Phi}{R^2}$. Запишем формулу Погсона для обоих положений астероида:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = -2.5 \lg \frac{E_1}{E_2} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta m = -2.5 \lg \frac{\Phi_1 r_2^2}{\Phi_2 r_1^2}.$$

Фаза в случае противостояния $\Phi_1 = 1$, а в случае квадратуры $\Phi_2 = \frac{1+\cos\beta}{2}$, где угол $\beta = \arcsin \frac{1}{r}$, если расстояние r выражено в а.е. Для косинуса любого угла верно:

$$\cos \arcsin x = \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x} = \sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Расстояния до астероида в противостоянии r_1 и квадратуре r_2 выражаются очевидным образом, значит:

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{\Phi_1 r_2^2}{\Phi_2 r_1^2} = -2.5 \lg \frac{1 \cdot (r^2 - 1)}{\frac{1+\sqrt{1-1/r^2}}{2} \cdot (r-1)^2}.$$

Запишем основное уравнение, которое требует решения:

$$\frac{2r(r+1)}{(1+\sqrt{r^2-1})(r-1)} = w,$$

здесь $w = 10^{-0.4\Delta m}$. Понятно, что наиболее ярким астероид будет в момент противостояния, значит, $\Delta m = m_1 - m_2$ должна быть меньше нуля. По условию разность звездных величин равна 3^m, т.е. $\Delta m = -3^m$, следовательно, $w \approx 15.8489$.

Если предположить, что $r \gg 1$ (то есть, по сути, пренебречь фазой), то это выражение сильно упрощается:

$$\Delta m = -2.5 \lg \frac{r+1}{r-1} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{w+1}{w-1} = 1.13.$$

Но полученное значение не удовлетворяет предположению $r >> 1$, следовательно, данное предположение, как и полученный ответ, неверны (период при таком радиусе орбиты получается равным 1.21 года).

В принципе, можно попытаться решить основное уравнение аналитически, но это затруднительно. Лучше построить график зависимости величины w от r, например, при помощи `LibreOffice Calc` (`MS Office Excel`) или `GnuPlot`:

По графику видно, что кривая пересекается с прямой в точке $(1.18, 15.8489)$, что и дает нам искомый радиус орбиты астероида: $r = 1.18$ а.е. Теперь подставляем это значение в третий закон Кеплера $T^2 = a^3$ и получаем период обращения астероида вокруг Солнца, равный 1.28 лет.

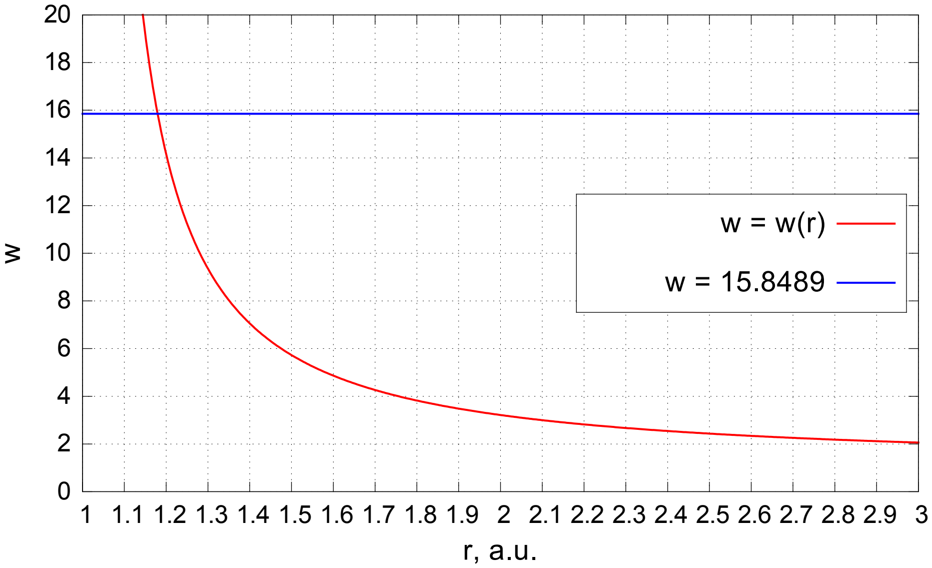

Рис. 3: График зависимости величины w от радиуса орбиты астероида

4. Оцените, на каком расстоянии от Солнца надо разместить черный чайник объемом 2 литра, наполненный водой с комнатной температурой, чтобы он, двигаясь вокруг Солнца по круговой орбите, полностью выкипел за один оборот. Можно считать, что чайник находится в полностью прозрачной капсуле, в которой поддерживается нормальное атмосферное давление.

Решение (8 баллов):

Пусть чайник обращается вокруг Солнца по круговой орбите с радиусом a. Площадь поперечного сечения обозначим за S. Тогда, ввиду того, что чайник не просто черный, а абсолютно чернотельный (возможно, и не абсолютно, но в оптической части спектра, где в основном излучает Солнце, он все-таки черный, поэтому такое приближение будет достаточно хорошим), в единицу времени чайник будет получать количество энергии, равное

$$L_+ = \frac{L_\odot}{4\pi a^2} S,$$

где $L_\odot$ — светимость Солнца.

Однако за ту же единицу времени чернотельный чайник (как всякое абсолютно черное тело) будет и излучать количество энергии, равное $L_- = kS\sigma T^4$, где σ — постоянная Стефана-Больцмана, T — температура кипения воды, равная 373 K (после ее достижения и до полного выкипания чайник будет сохранять эту температуру). Коэффициент k показывает, во сколько раз площадь поверхности чайника превышает площадь его поперечного сечения (для круглых чайников этот коэффициент равен 4, таковым мы его и примем, однако желающим не возбраняется провести специальные измерения домашнего чайника для уточнения значения k).

В этот момент уже можно оценить примерные рамки возможного ответа. Если полученная и излученная за единицу времени энергии у чайника будут совпадать, то на собственно выкипание ничего не останется. Соответственно, даже на орбите, на которой равновесная температура абсолютно черного тела равна температуре кипения воды, чайник выкипеть не сможет. Поскольку, как известно, океаны на Земле не кипят, надо полагать, что искомый радиус орбиты должен быть уж точно меньше радиуса орбиты Земли.

Период обращения чайника вокруг Солнца обозначим за P, и он связан с радиусом орбиты через третий закон Кеплера:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot},$$

где $M_\odot$ — масса Солнца. Тогда за один полный оборот энергия, полученная и сохраненная чайником, составит

$$E = P \cdot (L_+ - L_-) = \left(\frac{SL_\odot}{4\pi a^2} - kS\sigma T^4\right) \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{GM_\odot}}\, a^{3/2}.$$

Из многочисленных задач, решаемых на уроках физики, известно, что энергия, которая требуется для испарения некоторой массы воды при атмосферном давлении, существенно (на порядок) превосходит энергию, которая нужна для нагрева той же воды от комнатной температуры до температуры кипения. Поскольку задача оценочная, стадией предварительного нагрева мы пренебрежем и будем учитывать только энергию, требуемую на испарение. По той же причине мы пренебрежем энергией, требуемой для нагрева собственно вещества чайника (удельные теплоемкости веществ, из которых делают чайники, обычно меньше удельной теплоемкости воды). В таком случае энергия $E = m \cdot q$, где $q \approx 2$ МДж/кг — удельная теплота парообразования воды, а m — масса воды в чайнике (как несложно догадаться, в двухлитровом чайнике находится 2 литра воды и, соответственно, $m = 2$ кг).

Таким образом
$$S\,\left(\frac{L_\odot}{4\pi a^2} - k\sigma T^4\right)\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{GM_\odot}}\,a^{3/2} = m\,q,$$
и в этом уравнении нам известны почти все величины, кроме a. Недостающим параметром является S, но, вспомнив вид типичного двухлитрового чайника (например, в виде двух совмещенных кубиков со стороной 10 см каждый), мы оценим его как $S = 0.02$ м^2.

Подставим числа (пользуясь системой СИ и ограничиваясь одной значащей цифрой):
$$2\cdot 10^{-2}\,\left(\frac{4\cdot 10^{26}}{4\cdot 3\,a^2} - 4\cdot 6\cdot 10^{-8}\,(4\cdot 10^2)^4\right)\cdot\frac{2\cdot 3}{\sqrt{7\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^{30}}}\,a^{3/2} = 2\cdot 2\cdot 10^6.$$

Сразу же видны две проблемы. Во-первых, метры не очень подходят для выражения радиуса орбиты (астрономические единицы явно лучше), во-вторых, у нас получается довольно неприятное уравнение.

Первое исправимо. Если сделать замену $a = (1.5\cdot 10^{11})\times R$ (тем самым R будет радиусом орбиты в астрономических единицах), то уравнение после упрощения и сокращения всего, что только можно, примет вид:
$$5 - 18\,R^2 = 0.02\,\sqrt{R}$$

Его можно решить численно (формат заочного тура это позволяет), но можно ограничиться и простым подбором ответа, который окажется немного меньшим, чем 0.5 а.е.

5. Однажды на некоторой олимпиаде по астрономии проходил наблюдательный тур. Одно из заданий заключалось в следующем: участникам раздали листы с напечатанными окружностями радиуса R и отмеченными на них сторонами света, и было необходимо пронаблюдать звезду с горизонтальными координатами h_0 и A_0 и отметить ее на карте в ортографической проекции, считая, что окружность — это горизонт, а ее центр — зенит. Для проверки жюри сделали карту-шаблон, на которую нанесли верную точку и нарисовали окружность радиуса r с центром в ней — она задавала «ворота», в которые должны были попасть участники. Те, чья точка оказывалась в ней, получали за задачу полный балл.

(a) На каком максимальном расстоянии на небе от звезды может находиться точка, отмеченная участником на карте и попавшая в «ворота», и где это расстояние достигается?

(b) Какая из точек границы «ворот» на сфере ближе всего к звезде и каково расстояние от звезды до нее?

(c) Качественно объясните, почему такой способ проверки может давать не очень хорошие результаты в отдельных случаях.

Можно считать, что окружность радиуса r не выходит за границу карты.

Решение (8 баллов):

Решая задачу, удобно считать сферу единичной — это, очевидно, никак не изменит хода решения, а полученные результаты нужно будет просто умножить на R. Рассмотрим точку на сфере с координатами (h, A). Спроецируем ее на горизонт и перейдем в полярные координаты:
$$\begin{cases} p = \cos h \\ A = A \end{cases} \tag{1}$$

А теперь перейдем в декартовы координаты:

$$\begin{cases} x = p\cos A \\ y = p\sin A \end{cases} \tag{2}$$

Запишем уравнение «ворот» в них, пока еще на плоскости:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{3}$$

Подставляя (2) в (3), получим уравнение в полярных координатах:

$$(p\cos A - p_0\cos A_0)^2 + (p\sin A - p_0\sin A_0)^2 = r^2$$

Преобразовывая,

$$p^2 + p_0^2 - 2pp_0\cos(A - A_0) = r^2 \tag{4}$$

Теперь подставим (1) в (4), и получим уравнение «ворот» уже на сфере:

$$\cos^2 h + \cos^2 h_0 - 2\cos h\cos h_0\cos(A - A_0) = r^2 \tag{5}$$

При этом мы можем записать выражение для расстояния ρ от звезды до произвольной точки сферы, пользуясь известной формулой из сферической тригонометрии:

$$\cos\rho = \sin h\sin h_0 + \cos h\cos h_0\cos(A - A_0) \tag{6}$$

Выражая $\cos(A - A_0)$ из (5) и подставляя в (6), можно избавиться от азимута и пары косинусов в придачу:

$$\cos\rho = \sin h\sin h_0 + \frac{1}{2}(\cos^2 h + \cos^2 h_0 - r^2) \tag{7}$$

Теперь сделаем замену $\xi = \sin h$:

$$\cos\rho = -\frac{1}{2}\xi^2 + \sin h_0\xi + \frac{1}{2}(1 + \cos^2 h_0 - r^2) \tag{8}$$

Заметим, что справа — квадратный трехчлен с отрицательным старшим коэффициентом, значит он имеет единственный экстремум: максимум в точке

$$\xi_{min} = -\frac{b}{2a} = \sin h_0 \tag{9}$$

Он, очевидно, всегда достигается в двух точках при $h = h_0$ — точках пересечения альмукантарата, проходящего через звезду, с границей наших «ворот». Косинус убывает на $[0, \frac{\pi}{2}]$, поэтому расстояние до границы в этих точках минимально и равно

$$\rho_{min} = \arccos\left(1 - \frac{r^2}{2}\right) \tag{10}$$

Так как экстремум у нас только один, наибольшим расстояние будет в одной из граничных точек — либо там, где высота минимальна, либо там, где максимальна. Очевидно, что эти две высоты достигаются на вертикале, проходящем через звезду. Поэтому, пользуясь (1), можно записать такие выражения для этих высот:

$$\cos(h_0 - \rho_{max_1}) = \cos h_0 + r \tag{11}$$

$$\cos(h_0 + \rho_{max_2}) = \cos h_0 - r \tag{12}$$

Заметим, что $(\cos x)' = -\sin x$, поэтому чем x больше, тем быстрее косинус убывает. В (11) и (12) изменения косинуса равны по модулю, поэтому в (11) аргумент должен был измениться сильнее, чем в (12). Значит, максимальное расстояние достигается в самой низкой точке и равно

$$\rho_{max} = h_0 - \arccos(\cos h_0 + r) \tag{13}$$

Таким образом, мы получили ответ на (a) в (10) и на (b) в (13) (с точностью до домножения на R, конечно же). Теперь заметим, что если звезда находится близко к горизонту, не только максимальное и минимальное расстояния, но даже ρ_{max_1} и ρ_{max_2} отличаются довольно сильно, ведь там косинус убывает быстрее всего. Да и эллипс, который является проекцией настоящей окружности на сфере, уже имеет очень большой эксцентриситет. Таким образом, вблизи горизонта допустимая погрешность измерений заметно анизотропна, что весьма плохо.