XXV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

отборочный тур, решения

2017

23 ноября

11 класс

1. Пульсар — это нейтронная звезда, которая очень быстро вращается. Ее масса равна $1.4\,\mathfrak{M}_\odot$ (1.4 массы Солнца), радиус 10 км. Какой может быть максимально возможная линейная скорость точки на экваторе пульсара?

Решение:

Для того, чтобы вещество, находящееся на экваторе, не улетело от звезды, необходимо, чтобы его скорость не превышала первую космическую скорость для нейтронной звезды. Она и будет искомой скоростью.

Запишем выражение для первой космической скорости $v = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}}{R}}$, где G — гравитационная постоянная, $\mathfrak{M}$ — масса нейтронной звезды, R — ее радиус. Вспомнив, что $\mathfrak{M}_\odot = 2\cdot 10^{30}$ кг (или вычислив $G\mathfrak{M}_\odot$ по радиусу земной орбиты и продолжительности года), получим, что $v \approx 10^8$ м/с.

М.В.Костина

2. На каком расстоянии от Бетельгейзе должна находиться планета, движущаяся вокруг звезды по круговой орбите, чтобы получать такое же количество света в единицу времени, что и Земля? Абсолютные звездные величины Бетельгейзе и Солнца равны -5^m и $+5^m$ соответственно. Определите продолжительность года на такой планете и выразите ее в земных годах, если известно, что масса Бетельгейзе $\mathfrak{M}_\text{Б} = 15\,\mathfrak{M}_\odot$.

Решение:

Поскольку изменение абсолютной звездной величины на 5^m соответствует изменению светимости на два порядка, светимость Бетельгейзе в 10^4 раз больше светимости Солнца. Освещенность E, создаваемая звездой светимости L на расстоянии r, может быть записана как

$$E = \frac{L}{4\pi r^2},$$

откуда видно, что расстояние от Бетельгейзе до планеты должно быть в 10^2 раз больше расстояния от Солнца до Земли, т.е. $r = 10^2$ а.е.

Воспользуемся III законом Кеплера

$$\frac{P^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\mathfrak{M}_\text{Б}},$$

где P — орбитальный период планеты, G — гравитационная постоянная, причем для простоты выразим массу звезды в массах Солнца, период — в годах (земных), а радиус орбиты — в а.е. В такой системе единиц $G = 4\pi^2$, поэтому

$$P = \sqrt{\frac{(10^2)^3}{15}} \approx \frac{10^3}{4} \approx 3\cdot 10^2 \text{ лет}.$$

А.В.Веселова

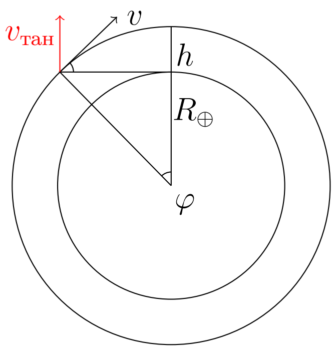
3. Искусственный спутник Земли летает по круговой орбите высотой 600 км в плоскости земного экватора. На экваторе в пункте наблюдения установлена неподвижная камера, поле зрения которой составляет $2.6° \times 2.6°$. Оцените максимальный промежуток времени, в течение которого камера сможет непрерывно наблюдать спутник.

Решение:

Заметим, что радиус орбиты спутника всего на 10% превышает радиус Земли, поэтому скорость движения спутника по орбите не слишком сильно отличается от первой космической скорости на поверхности Земли $v \approx 8$ км/с (более точный расчет даст 7.6 км/с). По той же причине для оценки можно пренебречь вращением Земли вокруг своей оси — оно существенно медленнее, поэтому скорость спутника относительно поверхности Земли в любом случае близка к скорости его орбитального движения.

Поскольку нас интересует максимальный возможный промежуток непрерывного наблюдения, зададимся вопросом: в каком месте неба угловая скорость спутника будет наименьшей? Очевидно, что если мы найдем эту наименьшую возможную скорость и разделим на нее размер поля камеры, мы получим искомую оценку.

Для того, чтобы угловая скорость была минимальной, нужно, чтобы угол между направлением на спутник и вектором его скорости был как можно меньше (в таком случае тангенциальная компонента скорости также будет меньше), а также чтобы расстояние до спутника было максимальным. Нарисовав рисунок, легко можно увидеть, что оба условия будут выполнены тогда, когда спутник для камеры находится на горизонте.



В этом случае расстояние между спутником и камерой будет равным $l = R_\oplus \operatorname{tg}\varphi$, а тангенциальная скорость $v_{\text{тан}} = v \sin\varphi$, причем $\cos\varphi = R_\oplus/(R_\oplus + h)$. Тут $R_\oplus$ — радиус Земли, а h — высота орбиты спутника.

Тогда угловая скорость движения спутника на горизонте составит

$$\omega = \frac{v_{\text{тан}}}{l} = \frac{v \sin\varphi}{R_\oplus \operatorname{tg}\varphi} = \frac{v}{R_\oplus} \cos\varphi = \frac{v}{R_\oplus + h}.$$

Вычисляя ее, получаем, что $\omega \approx 8/7 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$ $\approx 0°.066$/с. Поскольку камеру можно установить так, чтобы часть траектории, доступная наблюдению, пролегала по диагонали поля зрения, угловое расстояние, на котором камера может следить за спутником, составляет $\sqrt{2} \cdot 2°.6 \approx 3°.7$. В итоге получаем, что возможное время наблюдения составляет примерно 56 секунд, т.е. около 1 минуты.

А.В.Веселова, П.А.Тараканов

4. В древнем Египте в элитные войска фараона набирали юношей, которые могли различить звезды Мицар и Алькор. Человек с неострым зрением видит эти звезды как одну. Какую звездную величину для такого человека будет иметь такая «сдвоенная» звезда, если видимая звездная величина Алькора равна $+4^m$, абсолютная звездная величина Мицара равна $+0^m.3$, а его параллакс равен $0''.04$.

Решение:

Сначала определим видимую звездную величину Мицара.

$$m = M - 5 + 5\lg r = M - 5 - 5\lg\pi,$$

где r — расстояние до звезды в парсеках, π — параллакс звезды в секундах, M — ее абсолютная звездная величина. Тогда видимая звездная величина Мицара $m_M = 0.3 - 5 - 5\lg(4\cdot 10^{-2}) \approx 2^m.3$.

Пусть m_A — видимая звездная величина и Алькора, m_0 — видимая звездная величина их как целого. По формуле Погсона (E с индексами обозначены освещенности, создаваемые соответствующими звездами):

$$m_A - m_M = 2.5\lg\left(\frac{E_M}{E_A}\right) \Rightarrow \frac{E_M}{E_A} = 10^{0.4(m_A-m_M)} = 10^{0.4(4-2.3)} = 10^{0.68} \approx 10^{2/3} = 100^{1/3} \approx 4.8$$

$$m_A - m_0 = 2.5\lg\left(\frac{E_0}{E_A}\right) = 2.5\lg\left(1+\frac{E_M}{E_A}\right) = 2.5\lg(1+4.8) \approx 2.5\lg 6 \approx 2 \Rightarrow m_0 \approx 2^m.$$

А.В.Веселова

5. Величина высоты верхней кульминации звезды, наблюдающейся в северном полушарии, совпадает с величиной зенитного расстояния этой же звезды в нижней кульминации. Определить широту наблюдения и склонение звезды. Рефракцию не учитывать.

Решение:

Если верхняя кульминация происходит к югу от зенита, то:

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta,$$

$$z = 180^\circ - \varphi - \delta,$$

где h — высота в верхней кульминации, z — зенитное расстояние в нижней кульминации, φ — широта места наблюдения, δ — склонение звезды. Очевидно, $\delta = 45^\circ$, а широта наблюдения не играет роли. Т.о. подойдут все звезды, которые кульминируют к югу от зенита, т.е. $90^\circ - \varphi + \delta < 90^\circ \Rightarrow \varphi > 45^\circ$.

Если верхняя кульминация к северу от зенита, то:

$$h = 90^\circ + \varphi - \delta$$

$$z = 180^\circ - \varphi - \delta$$

Значит, широта $\varphi = 45^\circ$, и это подойдет для любой звезды, которая кульминирует к северу от зенита: $90 + \varphi - \delta < 90^\circ \Rightarrow \delta > 45^\circ$.

В.В.Григорьев