XXX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2023

12 февраля

9 класс

1. 62 года назад, 12 февраля 1961 года, к Венере была запущена автоматическая межпланетная станция «Венера-1». Определите примерную дату пролета АМС рядом с Венерой, если известно, что она двигалась по эллиптической орбите, касающейся орбит Земли и Венеры (так называемому эллипсу Гомана).

Решение:

С разумной точностью орбиты Земли и Венеры можно считать круговыми и лежащими в одной плоскости, а это означает, что на орбите Земли находился афелий орбиты АМС, а на орбите Венеры — перигелий. Поскольку радиус орбиты Венеры около 0.7 а.е., получаем, что большая полуось орбиты АМС равнялась $a = (1 + 0.7)/2 = 0.85$ а.е.

Тогда мы можем легко посчитать период обращения по такой орбите. Если измерять период в годах, то $P = a^{3/2}$. Вычисления можно провести, непосредственно подставив величину a в выражение, но удобнее воспользоваться приближенным равенством

$$(1-x)^\alpha \approx 1 \ - \alpha\, x, \qquad \text{если } x \approx 0.$$

Получаем, что

$$0.85^{3/2} = (1-0.15)^{3/2} \approx 1 \ - 1.5 \cdot 0.15 = 1 \ - 0.225 = 0.775.$$

Перелет от одной орбиты до другой занимает половину периода, поэтому это примерно 0.39 года (можно округлить и до 0.4). Умножив получившийся результат на 12, получим $4\frac{2}{3}$ месяца, что позволяет легко оценить дату: через четыре месяца после февраля будет июнь, 2/3 месяца — это примерно 20 дней, так что пролет при движении по такой орбите должен был произойти в самом конце июня 1961 года. Реальная орбита АМС немного отличалась от описанной в задаче, так что реальная АМС добралась до Венеры немного быстрее.

Комментарии:

2 балла — понимание ситуации (не прямолинейный полет/другие странные орбиты) и оценка полуоси орбиты Венеры (не все смогли).

1 балл — большая полуось перелетной орбиты.

1 балл — закон Кеплера.

1 балл — вычисление периода.

1 балл — учет, что нужна половина периода.

2 балла — численный ответ.

Типовая ошибка — потеря деления периода пополам. При прочих правильных действиях это означало потерю 2 баллов. «Получение» 19-20 мая, не следующего из приведенного решения — 0 баллов за задачу.

Также часть участников совсем не поняла, что такое эллипс Гомана, и пыталась вписывать его между орбитой Венеры и Земли, или полностью игнорировала его и пыталась считать движение прямолинейным (предполагая, что планеты не движутся) — и то, и другое приводило к нулевому баллу за задачу.

П.А. Тараканов

2. В будущем космический аппарат сел на поверхность астероида (диаметр 600 км, орбитальный период равен 4 года). Планетоход, работающий на солнечных батареях, отправился в путь по экватору астероида, за час проезжая 3 км. Период вращения астероида вокруг своей оси — 4 земных суток. Какую долю экватора успеет проехать планетоход, не попав в тень, если он начинает движение из центра освещенного полушария? Наклоном экватора астероида к плоскости его орбиты можно пренебречь.

Решение:

Определим скорость движения границы света и тени — терминатора. Для этого определим длительность солнечных суток на астероиде. Солнечные сутки — синодический период относительно периодов обращения астероида вокруг своей оси и вокруг Солнца:

$$S = \frac{T_{\text{orb}} T_{\text{rot}}}{T_{\text{orb}} - T_{\text{rot}}} = \frac{4 \cdot 365.25 \cdot 4}{4 \cdot 365.25 - 4} = 4.01\,\text{сут.}$$

Можно было без вычислений понять, что вычитаемое в знаменателе мало по сравнению с уменьшаемым, поэтому синодический период с точностью данных в условиях равен периоду обращения вокруг своей оси.

Длина экватора астероида равна $\pi D = 1885$ км, тогда скорость границы светлой и темной областей равна

$$V = \frac{\pi D}{S} = \frac{1885\,\text{км}}{4 \cdot 24\,\text{ч}} \approx 20\,\text{км/ч}.$$

Пусть планетоход движется по экватору в том же направлении, что и граница света и тени. Тогда это движение происходит с относительной скоростью 17 км/ч. Первоначально планетоход находится на расстоянии четверти экватора от терминатора, определим время, спустя которое тень догонит планетоход:

$$\frac{\pi D/4}{17} = \frac{1885/4}{17} = 28\,\text{ч}.$$

За такое время планетоход проедет расстояние

$$28 \cdot 3 \ = 84\,\text{км},$$

что составляет $84/1885 = 0.045$ от экватора.

А.В. Веселова

3. В далеком будущем жители Марса заметили, что некоторый большой астероид Главного пояса приближается к Марсу на минимальное расстояние каждые 2 марсианских года. Сколько времени будет при этом длиться сеанс радиолокации астероида с Марса? Какую долю поверхности астероида при этом наблюдатели увидят освещенной? Орбиты Марса и астероида считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Решение:

Астероид принадлежит Главному поясу, то есть находится дальше от Солнца, чем Марс. На минимальное расстояние астероид подходит к Марсу, находясь при этом в противостоянии, то есть в противоположной Солнцу точке неба для марсианского наблюдателя. Интервал времени между противостояниями — синодический период S, связанный с периодами обращения Марса T_M и астероида T_a соотношением

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_a}\,.$$

Отсюда определим период обращения астероида:

$$T_a = \left(\frac{1}{T_M} - \frac{1}{S}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{T_M} - \frac{1}{2T_M}\right)^{-1} = 2T_M.$$

Зная период обращения, определим большую полуось орбиты из третьего закона Кеплера в системе единиц «а.е. – год – масса Солнца»

$$T^2[\text{г}] = a^3[\text{а.е.}] \Rightarrow a = \sqrt[3]{T^2} = 2^{2/3} \cdot a_M = 2.4\,\text{а.е.}$$

Минимальное расстояние между астероидом и Марсом составит $2.4 - 1.5 = 0.9$ а.е., сигнал от Марса до астероида и обратно преодолеет 1.8 а.е. Расстояние от Земли до Солнца свет преодолевает за 500 секунд, тогда сеанс радиолокации будет длиться $500 \cdot 1.8 = 9 \cdot 10^2$ секунд.

Поскольку астероид обращается вокруг Солнца в той же плоскости, что и Марс, освещенным будет наблюдаться весь диск астероида.

Комментарии:

1 балл за размышление.

1 балл за интервал времени.

2 балла за закон Кеплера.

2 балла за расчет и правильный ответ.

2 балла за второй вопрос.

А.В.Веселова

4. В очень далеком будущем земляне основали поселение «Земля-123» на планете земного типа в далекой звездной системе. В этой системе есть два газовых гиганта — «Юпитер-123» и «Сатурн-123» с радиусами орбит 8 и 12 а.е. соответственно. В какой-то момент времени для наблюдателя на экваторе «Земли-123» газовые гиганты оказались в противоположных точках неба на горизонте ровно в полдень. Спустя какое-то время «Юпитер-123» снова оказался в полдень в той же точке горизонта. Можно ли будет в ближайшую после этого события ночь наблюдать «Сатурн-123»? Известно, что местное солнце имеет массу 1.2 массы Солнца, а год на колонизированной планете длится 2 земных года. Углом наклона местного экватора к местной эклиптике пренебречь.

Решение:

В полдень для наблюдателя на экваторе местное солнце находится строго над головой, тогда планеты находятся на горизонте на угловом расстоянии 90° от местного солнца в противоположных направлениях, что соответствует таким конфигурациям, как квадратуры. При этом мы не знаем, в какой квадратуре — восточной или западной — находится та или иная планета, поэтому нам придется рассмотреть два возможных варианта.

Для начала определим, спустя какое время «Юпитер-123» окажется в той же точке горизонта в полдень, то есть повторит свою конфигурацию — сместится на 360° в системе отсчета неподвижной линии «местное солнце — Земля-123». Для этого нам нужно будет оценить синодический период для двух планет, «Земли-123» и «Юпитера-123». Период обращения «Юпитера-123» оценим по третьему закону Кеплера в системе единиц «год — а.е. — масса Солнца»:

$$\frac{T_J^2}{a_J^3} = \frac{1}{M}, \qquad T_J = \sqrt{\frac{a_J^3}{M}} = \sqrt{\frac{8^3}{1.2}} \approx 21\,\text{год}.$$

Тогда синодический период будет равен

$$S_{EJ} = \frac{T_E T_J}{T_J - T_E} = \frac{2 \cdot 21}{21 - 2} = 2.2\,\text{года}.$$

Ровно спустя это время «Юпитер-123» оказался в той же точке горизонта в полдень.

Определим, на какой угол при этом относительно неподвижной линии «местное солнце — Земля-123» сместится «Сатурн-123». Для этого оценим его синодический период относительно «Земли-123». Период обращения «Сатурна-123» оценим по третьему закону Кеплера в системе единиц «год — а.е. — масса Солнца»:

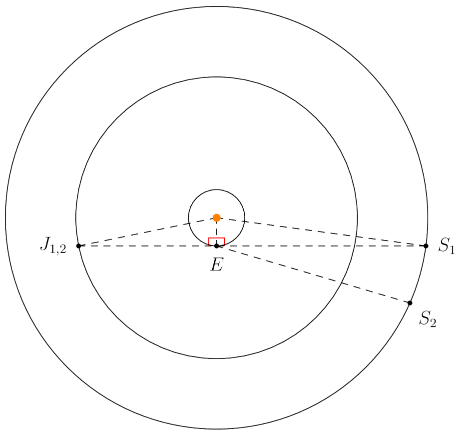
$$\frac{T_S^2}{a_S^3} = \frac{1}{M}, \qquad T_S = \sqrt{\frac{a_S^3}{M}} = \sqrt{\frac{12^3}{1.2}} = 38\,\text{лет}.$$

Тогда синодический период будет равен

$$S_{ES} = \frac{T_E T_S}{T_S - T_E} = \frac{2 \cdot 38}{38 - 2} = 2.1\,\text{года}.$$

Тогда в системе отсчета неподвижной линии «местное солнце — Земля-123» за 2.2 года «Сатурн-123» сместится на угол $360^\circ \cdot \frac{2.2}{2.1} = 375^\circ$. Заметим, что относительно более близкой к центральной звезде «Земли-123» газовые гиганты движутся медленнее, поэтому «Сатурн-123» не дойдет на 15° до своего положения на горизонте — немного отстанет. Далее нужно рассмотреть два варианта конфигураций планет.

1) Пусть «Юпитер-123» находится в восточной квадратуре, а «Сатурн-123» — в западной. При повторении конфигурации «Юпитера-123» угловое расстояние от местного Солнца до «Сатурна-123» будет превышать 90°, а это означает, что «Сатурн-123» будет виден ночью, достигая максимальной высоты над горизонтом в предрассветные часы.



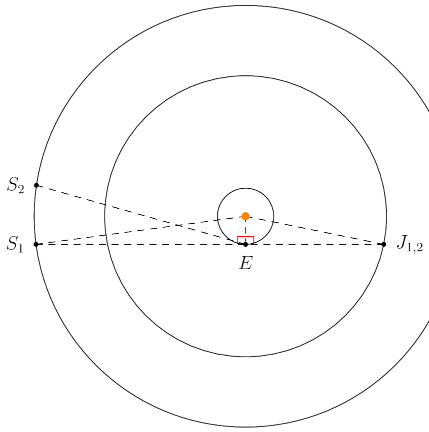
2) Пусть «Юпитер-123» находится в западной квадратуре, а «Сатурн-123» — в восточной. При повторении конфигурации «Юпитера-123» угловое расстояние от местного Солнца до «Сатурна-123» будет, наоборот, меньше 90°, а это означает, что наблюдать «Сатурн-123» можно будет ночью, после захода местного Солнца, но не очень высоко над горизонтом, поскольку максимальная высота будет достигаться еще в вечернее время, до захода Солнца.

Комментарии:

5 баллов: Все посчитано правильно, но сделан неправильный вывод (Сатурн не будет виден ночью).

3 балла: Формулы верные, но вообще нет вычислений. Итоговый ответ ошибочен.

Также 3 балла: Сделана разумная попытка решения, не давшая результата (написаны формулы для периодов, но при расчетах допущены ошибки, итоговый ответ неверен).



1 балл: «Я считаю, что Сатурн будет наблюдаться», «Предположим, что выполняется ситуация как на рисунке, тогда Сатурн будет наблюдаться» и т.п.

6 баллов: Все периоды посчитаны, но итоговый ПРАВИЛЬНЫЙ ответ получен не совсем корректными рассуждениями. (Т.е. задача решена полностью, но присутствуют значительные недочеты).

7 баллов: В целом все хорошо, присутствуют незначительные недочеты, не грубые арифметические ошибки или рассмотрены 2 случая и для них получены разные ответы "Да/Нет".

2 балла ставились, если написано чуть больше, чем «ну я так считаю», но решение оборвано на середине.

4 балла ставились просто за правильную идею. Либо если участник ответил не на тот вопрос, который задавался автором задачи.

Почему-то где-то треть участников читала вопрос как «Повторится ли та же самая картина через один синодический период Юпитера?», получала правильный ответ «нет» , но зачем?

Довольно часто встречались вычислительные ошибки, когда при вычислении сидерического периода пишется a^3, а в вычислениях подставляется a^2.

А.В.Веселова

5. Как ни странно, но в настоящем при наблюдении видимой глазом затменной двойной звезды было обнаружено, что затмения наблюдаются раз в 88 часов, причем каждый раз блеск двойной ослабевает на $0^m.75$. Определите большую полуось системы, массы ее компонент и их цвета, если известно, что суммарная масса двойной звезды равна 1.8 масс Солнца.

Решение:

В затменных двойных системах звезды поочередно закрывают друг друга (полностью или частично) от наблюдателя (поэтому они и «затменные»), и поскольку падение блеска каждый раз было одинаковым, это означает, что поверхностная яркость звезд одинакова — они имеют одну и ту же температуру.

О том же самом можно догадаться, если прикинуть (или вспомнить), какому примерно изменению освещенности соответствует изменение на $0^m.75$. Сделать это можно несколькими способами, но нас устроит и довольно грубая оценка. По определению шкалы звездных величин отношение освещенностей будет равно $10^(0.4\cdot 0.75) = 10^{3/10}$. Значит, нам надо найти число, которое при возведении в степень 10/3 даст 10. Результат явно будет где-то в районе 2, поскольку $2^3 = 8$, а $\sqrt[3]{2}$ немного больше единицы (и явно меньше, например, $\sqrt{2} \approx 1.4$.

Еще один способ — честно вычислить $2.512^{3/4}$. Округлив основание шкалы звездных величин до 2.5, мы найдем, что $2.5^3 = 5^3/2^3 = 125/8 \approx 15.6$. То, что корень четвертой степени из последнего числа будет очень близок к 2, очевидно (а в реальности — еще ближе, поскольку мы округлили основание шкалы вниз).

В итоге мы обнаруживаем, что блеск в обоих случаях падал практически в 2 раза. Поскольку каждый раз мы не видим какую-то одну звезду (или ее часть), отсюда можно сделать только один вывод — звезды вообще одинаковые, не только по температуре. Тем самым мы знаем массу каждой из них — 0.9 массы Солнца.

Теперь займемся большой полуосью системы. Ее легко вычислить, выразив орбитальный период системы в годах (масса системы нам уже дана в массах Солнца, поэтому полуось мы получим в астрономических единицах). Важно не забыть, что 88 часов — это половина орбитального периода. Сам он равен 176 часам или 7.3 суток, легко найти, что это 1/50 года. Тогда, поскольку в нужной нам системе единиц

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{1}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2},$$

находим, что

$$a = \sqrt[3]{\frac{1.8}{50^2}} = \sqrt[3]{\frac{1.8}{2.5 \cdot 10^3}} \approx 0.09 \text{ а.е.}$$

Осталось ответить на вопрос о цветах звезд. Это не могут быть белые карлики — система по условию видна невооруженным глазом. Это не могут быть красные гиганты — большая полуось системы это среднее расстояние между компонентами, красные гиганты такой массы на таком расстоянии просто не поместились бы. Следовательно, это звезды Главной последовательности, чуть менее массивные (и чуть более холодные), чем Солнце, но не настолько, чтобы заметно отличаться от него по цвету. Следовательно, система состоит из двух одинаковых желтых звезд (с учетом массы — класса примерно G5V).

Комментарии:

Вывод о падении яркости в 2 раза — 1 балл, вывод об идентичности звезд — 2 балла, расчет большой полуоси орбиты — 2 балла, вывод о том, что это звезды главной последовательности — 2 балла, цвет звезд — 1 балл.

Частые ошибки: почти никто не обосновал, почему это звезды главной последовательности, максимум — делали пометки. Поэтому и полный балл получили мало человек.

Также довольно много участников еще при идентичности звезд пользовались только отсутствием вторичных минимумов, из чего можно сделать вывод об одинаковой поверхностной яркости звезд. Тогда первый этап не оценивался, а второй — только в 1 балл.

П.А. Тараканов