

XXVIII Санкт-Петербургская  
астрономическая олимпиада  
теоретический тур, решения

2021  
31  
января

10 класс

1. Капелла — тесная двойная звезда, состоящая из почти одинаковых компонент. Впервые уверенно разрешить её компоненты без использования интерферометра удалось только при наблюдениях на телескопе Хаббла в ультрафиолетовом диапазоне на длине волны 3000 Å. Оцените угловое расстояние между компонентами. Диаметр зеркала телескопа Хаббла равен 2.4 метра.

**Решение:**

Угловое разрешение

$$\alpha \approx 1.2 \cdot \frac{\lambda}{D} = 1.2 \cdot \frac{3000}{10^{10} \cdot 2.4} \approx 0''.03$$

Это минимально возможное расстояние между компонентами, при котором их можно будет различить. С другой стороны, можно заметить, что результат не должен быть и существенно больше — в противном случае компоненты удалось бы разрешить и при наблюдениях в оптическом диапазоне (или при наземных наблюдениях в близком ИК-диапазоне, где эффективно можно использовать адаптивную оптику).

*М.В.Костина*

2. Астероид радиусом 50 метров в некоторый момент времени находился на расстоянии 0.866 а.е. от Солнца и при наблюдении с Земли угол между астероидом и Солнцем составлял  $60^\circ$ . Оцените видимую звездную величину астероида в этот момент. Возможно ли наблюдать его в телескоп с диаметром объектива 50 см? Оптические свойства поверхности астероида такие же, как у Луны.

**Решение:**

Применим теорему синусов к треугольнику «Солнце – Земля – астероид» и определим угол  $\varphi$  с центром в астероиде между направлениями на Солнце и Землю:

$$\frac{\sin \varphi}{1 \text{ а.е.}} = \frac{\sin 60^\circ}{0.866 \text{ а.е.}} \quad \sin \varphi = 1, \quad \varphi = 90^\circ.$$

То есть треугольник является прямоугольным. Тогда расстояние от астероида до Земли можно вычислить как

$$r = 1 \text{ а.е.} \cdot \cos 60^\circ = 0.5 \text{ а.е.},$$

и мы видим астероид, используя аналогию с Луной, в первой или последней четверти.

Дальше можно рассуждать т.к. Отношение освещенностей, создаваемых астероидом и Луной в какой-то четверти, можно вычислить следующим образом:

$$\frac{E}{E_{\zeta}} = \left( \frac{a_{\zeta}}{a} \cdot \frac{R}{R_{\zeta}} \cdot \frac{r_{\zeta}}{r} \right)^2,$$

где  $a$  — радиус орбиты астероида ( $a = \sqrt{3}/2$  а.е., что можно легко заметить после вычисления расстояний выше),  $a_{\zeta}$  — расстояние от Солнца до Луны (попросту 1 а.е.),  $R$  —

радиус астероида,  $R_{\zeta}$  — радиус Луны (равный примерно  $1.7 \cdot 10^3$  км),  $r_{\zeta}$  — расстояние от Земли до Луны (в данном случае удобнее всего вспомнить, что это примерно  $1/400$  а.е.). Подставляя числа, получаем

$$\frac{E}{E_{\zeta}} = \frac{4}{3} \cdot \left( \frac{5 \cdot 10^1}{1.7 \cdot 10^6} \right)^2 \cdot \left( \frac{1/400}{1/2} \right)^2 = \frac{4 \cdot 25 \cdot 10^2}{3 \cdot 3 \cdot 10^{12} \cdot 4 \cdot 10^4} \approx 2.8 \cdot 10^{-14}.$$

Переход к звездным величинам можно произвести вообще без формул. Поскольку каждые два порядка эквивалентны разнице на  $5^m$ , а коэффициент 2.8 мало отличается от  $2.512 \dots$ , видимая звездная величина астероида будет отличаться от видимой звездной величины Луны в четверти на  $14/2 \cdot 5 - 1 = 34^m$ .

Видимая звездная величина полной Луны известна и составляет  $-12^m.7$ . Напрашивается идея найти изменение звездной величины при уменьшении освещенности в два раза и посчитать это видимой звездной величиной Луны в четверти (если это сделать, получится с довольно хорошей точностью  $-12^m$ ), однако это неправильно. Так было бы, если бы поверхность Луны рассеивала свет во всех направлениях одинаково, но это не совсем т.к. Поэтому надо вспомнить более подходящее данное: видимая звездная величина Луны в четверти составляет около  $-10^m$ . Тогда мы сразу можем сказать, что астероид будет иметь величину  $+24^m$ .

То, что его не удастся увидеть глазом в полуметровый телескоп, по-видимому, можно считать очевидным, да простят нас за небольшой каламбур. Интереснее отметить, что и использование более совершенных приемников излучения также не поможет: наибольшие наземные телескопы позволяют наблюдать объекты примерно  $+29^m$ , что соответствует освещенности, меньшей в  $10^2$  раз. Следовательно, надеяться зарегистрировать астероид можно при наблюдении с телескопом, линейный размер объектива которого в 10 раз меньше, чем у крупнейших наземных телескопов. Последние имеют размеры около 10 м, следовательно, необходим инструмент по крайней мере с метровым диаметром объектива.

*А.В.Веселова*

3. Двойная система состоит из звезды с максимальным радиусом 0.10 а.е. и белого карлика, находящегося на расстоянии 0.14 а.е. от центра основного компонента. Масса белого карлика равна массе Солнца, с основного компонента на карлик идет аккреция вещества с небольшой скоростью. Оцените среднюю плотность основного компонента системы.

**Решение:**

Так как скорость изменения массы мала, то для частиц вещества основного компонента, расположенных ближе всего к карлику (они лежат на прямой, соединяющей центры звезд и удалены на максимальный радиус от центра основного компонента), векторная сумма сил гравитации и центробежной (вызванной вращением вокруг центра масс системы) должна оказаться нулевой. Отметим, что орбиты в системе должны быть круговыми (и потому, что идет постоянная аккреция, и потому, что расстояние между компонентами системы фиксировано).

Обозначим массу основного компонента  $\mathcal{M}_1$ , массу карлика  $\mathcal{M}_2$ , большую полуось системы (фактически расстояние между компонентами)  $a$  и максимальный радиус основного компонента  $R$ . Центр масс системы находится на расстоянии  $r$  от центра основного компонента, которое можно выразить как

$$r = a \cdot \frac{\mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}$$

Тогда условие для сил — вернее, для ускорений, действующих на пробную частицу — может быть записано в виде

$$\frac{G\mathcal{M}_2}{(a-R)^2} + \omega^2 \cdot (R-r) = \frac{G\mathcal{M}_1}{R^2},$$

где  $\omega$  — орбитальная циклическая частота системы, легко определяемая из III закона Кеплера. В самом деле

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

поэтому

$$\omega^2 = \frac{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{a^3}.$$

Собирая все воедино, получаем уравнение

$$\frac{G\mathfrak{M}_2}{(a-R)^2} + \frac{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{a^3} \cdot \left( R - a \cdot \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} \right) = \frac{G\mathfrak{M}_1}{R^2},$$

в котором гравитационная постоянная  $G$  сокращается. Сначала немного упростим выражение:

$$\frac{\mathfrak{M}_2}{(a-R)^2} + \frac{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)R}{a^3} - \frac{\mathfrak{M}_2}{a^2} = \frac{\mathfrak{M}_1}{R^2}$$

и

$$\mathfrak{M}_2 \frac{R \cdot (2a - R)}{(a-R)^2 a^2} + \frac{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)R}{a^3} = \frac{\mathfrak{M}_1}{R^2},$$

а затем подставим все известные величины в массах Солнца и сотых долях астрономических единиц (чтобы не возиться с дробными числами):

$$1 \cdot \frac{10 \cdot 18}{4^2 \cdot 14^2} + \frac{(\mathfrak{M}_1 + 1) \cdot 10}{14^3} = \frac{\mathfrak{M}_1}{10^2}.$$

Отсюда

$$\left( \frac{18 \cdot 14}{16} + 1 \right) \cdot 10^3 = (14^3 - 10^3) \mathfrak{M}_1$$

или

$$17 \cdot 10^3 = 1.7 \cdot 10^3 \mathfrak{M}_1.$$

Видно, что  $\mathfrak{M}_1 \approx 10 \mathfrak{M}_\odot$  и останется оценить только среднюю плотность. Конечно, это можно сделать, если перевести массу в килограммы, радиус — в метры и воспользоваться очевидной формулой, но можно действовать проще.

Поскольку радиус Солнца составляет примерно  $1/200$  а.е., то основной компонент примерно в 20 раз больше Солнца. Следовательно, его объем в  $8 \cdot 10^3$  раз больше. Масса же больше солнечной в 10 раз, следовательно, плотность должна быть меньше плотности Солнца в  $8 \cdot 10^2$  раза. Воспользовавшись любой разумной оценкой плотности Солнца ( $1.4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, но можно просто взять плотность воды) получаем  $(1 \div 2)$  кг/м<sup>3</sup> — что-то похоже на плотность воздуха в обычных условиях. Это и есть ответ задачи.

*А.П.Гордеев*

4. При наблюдениях двойной системы, состоящей из нейтронной звезды массой 1.4 массы Солнца и звезды главной последовательности, были обнаружены рентгеновские пульсации со средним периодом 1 секунда, отклоняющиеся от него максимум на  $10^{-4}$  секунды. При этом спектральные наблюдения в оптическом диапазоне показали, что линия  $H_\alpha$  также периодически меняет длину волны, отклоняясь от среднего значения максимум на  $0.5 \text{ \AA}$ . Оцените светимость такой системы в оптическом диапазоне.

**Решение:**

За рентгеновские пульсации ответственна нейтронная звезда, поскольку звезды главной последовательности в рентгеновском диапазоне излучают очень слабо, а за оптическое

излучение — звезда-компаньон (поскольку нейтронные звезды в оптике практически ненаблюдаемы). Найдём из эффекта Доплера орбитальную скорость нейтронной звезды:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{v_1}{c},$$

тогда  $v_1 = 34$  км/с. Аналогичным образом из эффекта Доплера для линии  $H_\alpha$  получим скорость вращения звезды-компаньона вокруг центра масс:  $v_2 = 24$  км/с (для этого можно вспомнить или вычислить лабораторную длину волны линии, равную  $6563 \text{ \AA}$ , но на самом деле достаточно помнить, что она попадает в оптический диапазон и красная). Орбитальные скорости, как известно, обратно пропорциональны массам компонентов, откуда видно, что масса оптического компонента равна  $\mathcal{M}_2 = \frac{v_2}{v_1} \mathcal{M}_1 = 2 \mathcal{M}_\odot$ .

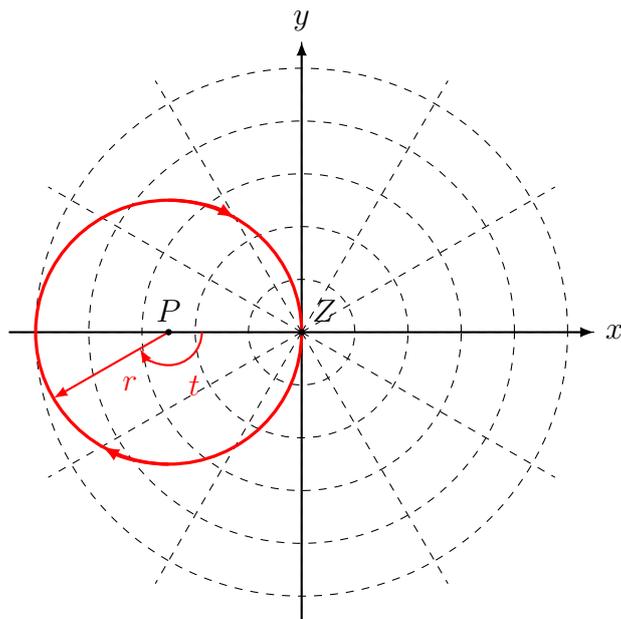
Поскольку масса не очень сильно отличается от солнечной и мы имеем дело со звездой главной последовательности, ее оптическую светимость можно оценить, исходя из соотношения  $L \propto \mathcal{M}^4$ , а она, как мы уже выяснили, и обеспечивает светимость двойной системы в оптическом диапазоне. Следовательно, ответ — 16 светимостей Солнца.

*И.Д.Маркозов*

5. Звезда Гиаусар ( $\lambda$  Дракона) имеет координаты  $\delta = 69^\circ 20'$  и  $\alpha = 11^h 31^m$ . Ее видимая звездная величина без атмосферы равна  $3^m.8$ . Как зависит видимая звездная величина звезды от часового угла при наблюдениях в Мурманске? Широта города  $\varphi = 68^\circ 58'$ .

**Решение:**

Известно, что поглощение в зените приблизительно равно  $0^m.2$ . Заметим, что верхняя кульминация звезды происходит почти в зените ( $h_v = 90^\circ - |\varphi - \delta| \approx 90^\circ$ ), а высота нижней кульминации ( $h_n = \varphi + \delta - 90^\circ \approx 48^\circ$ ). Воспользуемся моделью плоской атмосферы, согласно которой  $\Delta m \approx 0^m.2 \sec z$  при  $z < 70^\circ$ . Теперь посмотрим, как меняется зенитное расстояние Гиаусара. Так как Гиаусар отстоит от полюса на  $\approx 21^\circ$  (как и полюс от зенита), примем рассматриваемый участок неба плоским, а также будем считать, что в суточном движении Гиаусар проходит через зенит. Тогда зададим декартову систему координат с центром в зените и такой ориентацией, что одна из осей проходит через полюс (и координата полюса отрицательная):



Пусть  $r = 21^\circ$  — расстояние от полюса до зенита. Тогда суточный путь звезды задается так:

$$\begin{cases} x = r (\cos t - 1) \\ y = -r \sin t \end{cases}$$

где  $t$  – часовой угол, а искомое зенитное расстояние есть

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = r \sqrt{2(1 - \cos t)} = 2r \sin(t/2).$$

Осталось лишь подставить в начальное выражение, и тогда получим:

$$\Delta m \approx \frac{0^m.2}{\cos(42^\circ \cdot \sin(t/2))} \approx \frac{0^m.2}{1 - (42/57)^2 \cdot \sin^2(t/2)/2} \approx \frac{1^m.6}{7 + \cos t}.$$

Можно и не пользоваться плоским приближением. Запишем сферическую теорему косинусов для параллактического треугольника:

$$\cos z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t.$$

Подставив выражение, приближенно получим:

$$m = 3^m.8 + \frac{1^m.6}{6.9 + \cos t}.$$

*В.А.Дмитриев*