

XXX Санкт-Петербургская
астрономическая олимпиада
практический тур, решения

2023
12
марта

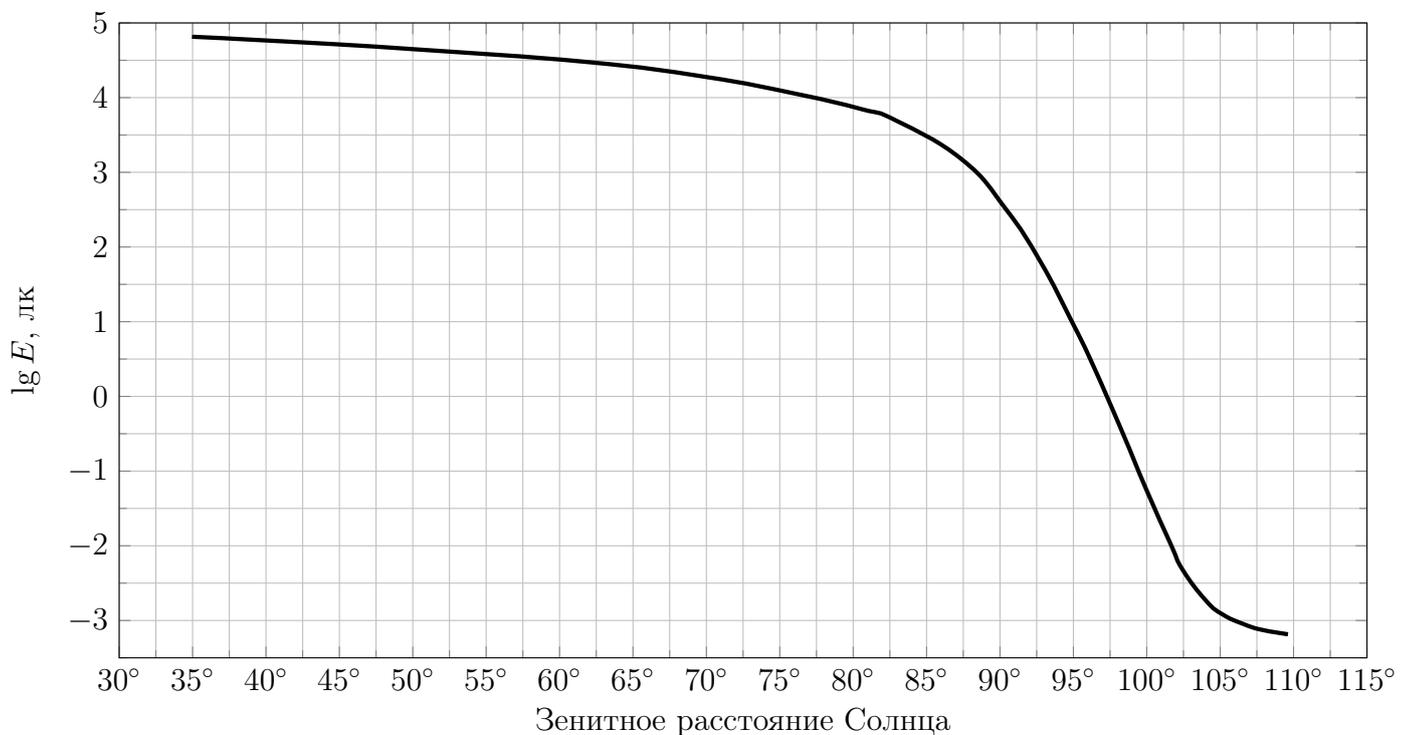
10 класс

Вам дана кеограмма (на отдельном листе), полученная астрономом в течение одного года. По вертикальной оси отложены месяцы, по горизонтальной — гражданское время. Часовой пояс пункта наблюдения UTC+1.

Определите географические координаты пункта наблюдения. Качественно объясните природу светлых наклонных полос: чем они вызваны и почему они наклонные. Качественно объясните несимметричность темной области относительно вертикальной оси.

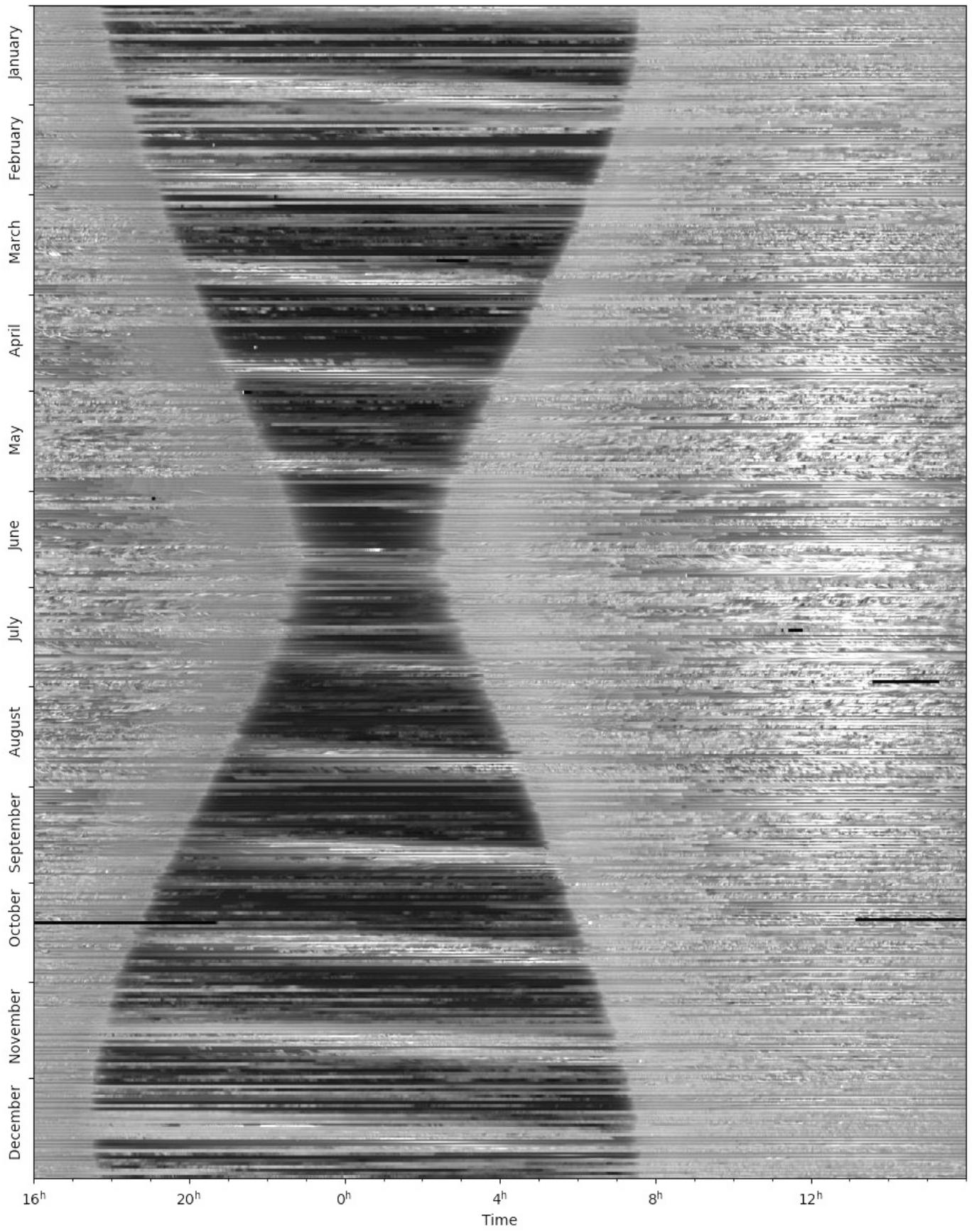
Кеограмма была получена следующим образом. Каждые 15 секунд в течение года неподвижная камера с объективом «рыбий глаз» (fisheye) делала снимок всего неба. Затем узкая полоска вдоль небесного меридиана вырезалась и сужалась до квадрата. Горизонтальная полоска, полученная из таких квадратов за сутки, составляет одну строку кеограммы. 365 полосок, расположенных вертикально, составляют полное изображение кеограммы.

Кроме того, вам дан график зависимости освещенности (в люксах) квадратного приемника в зависимости от зенитного расстояния Солнца в ясную погоду. Чувствительность камеры, использованной для создания кеограммы, резко падает при освещенности менее чем 0.03 лк.



Решение:

Ясно, что темная область в виде «песочных часов» олицетворяет ночное время, а светло-серая (голубая в случае цветного изображения) — дневное время. Зима, как это следует из вертикальной оси, приходится на декабрь, январь и февраль (ночи длиннее), то есть пункт наблюдения находится в северном полушарии Земли.



Сначала проще всего объяснить светлые наклонные полосы: это Луна. Действительно, самих полосок 12, лучше всего (полоски ярче) Луна видна в зимнее время (когда ночи темнее). Дадим объяснение наличию наклона и толщины этих полос, например, для конца января.

В третьей декаде января Луна начала ненадолго появляться на вечернем небе (в левой части «песочных часов») в фазе около первой четверти, что объясняет заметное отличие освещенности неба на меридиане. Затем, примерно через неделю, Луна уже в фазе полнолуния, поэтому освещенность от нее больше. Кроме того, для фотокамеры она еще и видна позже из-за того, что восходит из-за горизонта позже. Еще примерно через неделю Луну можно наблюдать лишь в утренние часы (в правой части «песочных часов»), и освещенность от нее меньше, чем в полнолуние. Поэтому она меняет освещенность неба лишь в утренние часы.

Как следует из объяснения, Луна в принципе на ночном небе может быть видна в течение примерно двух недель. Именно поэтому толщина полоски и составляет примерно половину месяца.

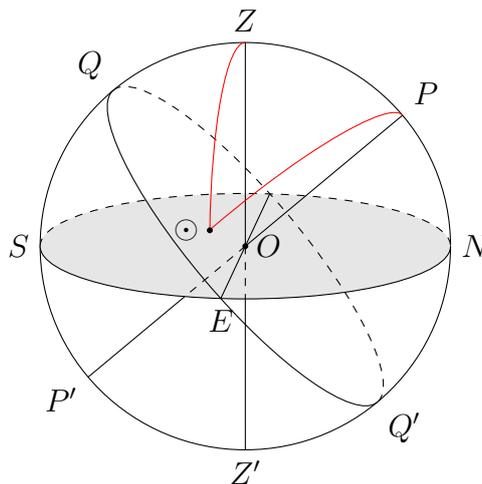
Самое узкое темное место «песочных часов» соответствует дню летнего солнцестояния, самое широкое — дню зимнего солнцестояния. Однако можно заметить, что в случае дня зимнего солнцестояния уширение «песочных часов» заметно несимметричное (и вся фигура темной области): в районе 10 декабря восходы Солнца происходят раньше, чем 23 декабря, а самые поздние заходы наблюдаются в январе. Это связано с эллиптичностью орбиты Земли и наличием наклона эклиптики к небесному экватору. Проще говоря — с уравнением времени.

По этим датам можно провести границы ночи и тем самым определить момент полуночи: он приходится примерно на $0^h30^m - 0^h35^m$ (в зависимости от погрешности измерений). Если бы полночь приходилась ровно на 0^h00^m , то при учете часового пояса можно было бы утверждать, что долгота пункта наблюдения соответствует 15° восточной долготы. Однако раз астрономическая полночь наступает позже, то от указанной величины нужно отнять

$$\frac{[30^m; 35^m]}{60^m} \times 15^\circ/h = [7^\circ.5; 8^\circ.75],$$

и долгота расположения камеры лежит в диапазоне $[6^\circ15'; 7^\circ30']$ восточной долготы.

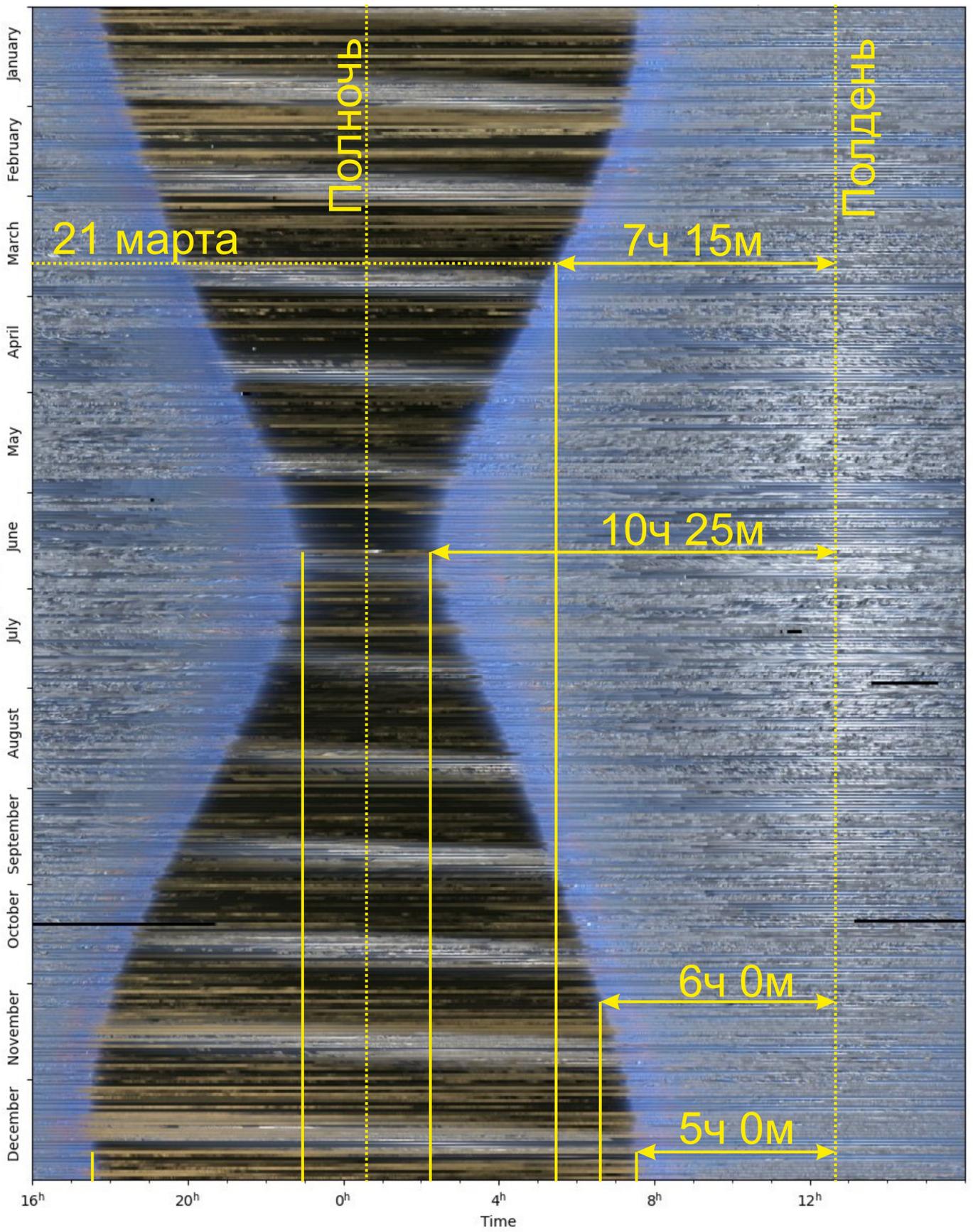
Для нахождения широты придется воспользоваться методами сферической астрономии. Нарисуем небесную сферу с восточной части (будем рассматривать восходящее Солнце, так как на кеограмме справа именно эти моменты измерять удобнее).



Напишем теорему косинусов для параллактического треугольника $PZ\odot$ в общем виде:

$$\begin{aligned} \cos(Z\odot) &= \cos(PZ) \cos(P\odot) + \sin(PZ) \sin(P\odot) \cos(\angle ZP\odot) \\ \cos(90^\circ - h) &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta) \cos t \\ \sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \end{aligned}$$

Сразу видно, что решать такое уравнение в общем виде относительно φ при отсутствии калькулятора — плохая затея, поскольку получающееся квадратное уравнение надо решить как можно точнее. Подумаем, как можно упростить нахождение широты.



Вариант 1, неправильный: рассмотреть случай, когда высота Солнца равна нулю. Самое простое предположение — считать, что граница темной и светлой областей на кеограмме соответствует моментам захода или восхода Солнца ($h = 0^\circ$). Тогда проще всего взять даты летнего и зимнего солнцестояний. В этом случае широта определяется через тангенс:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\cos t}{\operatorname{tg} \delta}$$

Измерения показывают, что половина «светлого времени суток» в день летнего солнцестояния длится $10^h 25^m$ (склонение Солнца $\delta = 23^\circ.4$), а в день зимнего — $5^h 00^m$ ($\delta = -23^\circ.4$). Измерения можно проводить как для непосредственно для светлой области, так и для темной области (а потом из 24^h вычитать длительность темной области и делить пополам). Все измерения приведены на изображении.

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\cos 75^\circ}{\operatorname{tg}(-23^\circ.4)} \approx 0.6 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 31^\circ \text{ зимнее солнцестояние}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\cos 156^\circ.25}{\operatorname{tg} 23^\circ.4} \approx 2.1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 63^\circ.4 \text{ летнее солнцестояние}$$

Итак, если интерпретировать границу раздела темной и светлой областей как момент захода Солнца, то результаты не согласуются друг с другом.

Отсюда напрашивается вывод: граница раздела темной и светлой областей — это не момент захода Солнца, а окончание сумерек для камеры. Но по кеограмме невозможно определить, когда конкретно Солнце восходит из-за горизонта или заходит за него.

Вариант 2: обнулить одно из слагаемых в правой части. Это можно сделать двумя путями, рассмотрев один из дней равноденствия (тогда склонение Солнца равно нулю, и первое слагаемое станет нулем, для примера показано весеннее равноденствие). Также можно было бы найти дату, в которую часовой угол Солнца в момент начала или окончания сумерек будет равен 6^h , что даст $\cos t = 0$ (это может быть в районе середины февраля или начала ноября). Однако, в этом случае величина склонения Солнца будет очень близка к глубине погружения Солнца под горизонт, из-за чего погрешность определения результата будет весьма велика. Так что сочтем этот метод наименее точным и не будем его рассматривать.

Согласно графику освещенности, камера станет плохо фиксировать излучение неба в случае погружения Солнца под горизонт на 11° (навигационные сумерки заканчиваются, когда погружение Солнца 12° , но по условию чувствительность камеры падает раньше). Соответственно, это и будет определять разделение светлого и темного времени суток на кеограмме.

В день осеннего равноденствия в момент окончания сумерек часовой угол Солнца составляет $7^h 15^m = 108^\circ.75$. Вычисляем:

$$\sin(-11^\circ) = \cos \varphi \cdot 1 \cdot \cos 108^\circ.75 \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{\sin 11^\circ}{\sin 18^\circ.75} \approx 0.59 \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 54^\circ$$

Вариант 3: длительность сумерек. Заметим, что в день весеннего равноденствия сумерки для камеры длятся $1^h 15^m$. За это время Солнце проходит по небу (находясь строго на небесном экваторе) $\approx 19^\circ$, хотя стартует от высоты -11° . Таким образом, траектория Солнца составляет угол $\cos \varphi = 11^\circ/19^\circ \Rightarrow \varphi \approx 54^\circ$. Обратим внимание, что эти вычисления практически идентичны тем, что были реализованы в варианте 2.

Итак, любой из вариантов дает положение пункта наблюдения $\varphi \approx 54^\circ$, $\lambda \approx 6^\circ 45'$.

Автор кеограммы — голландский астроном Cees Vasa, получена она в Нидерландском Институте Радиоастрономии. Координаты главного здания этого института составляют $52^\circ 49'$ северной широты, $6^\circ 24'$ восточной долготы.

В.В. Григорьев