XXIII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

практический тур, решения

2016

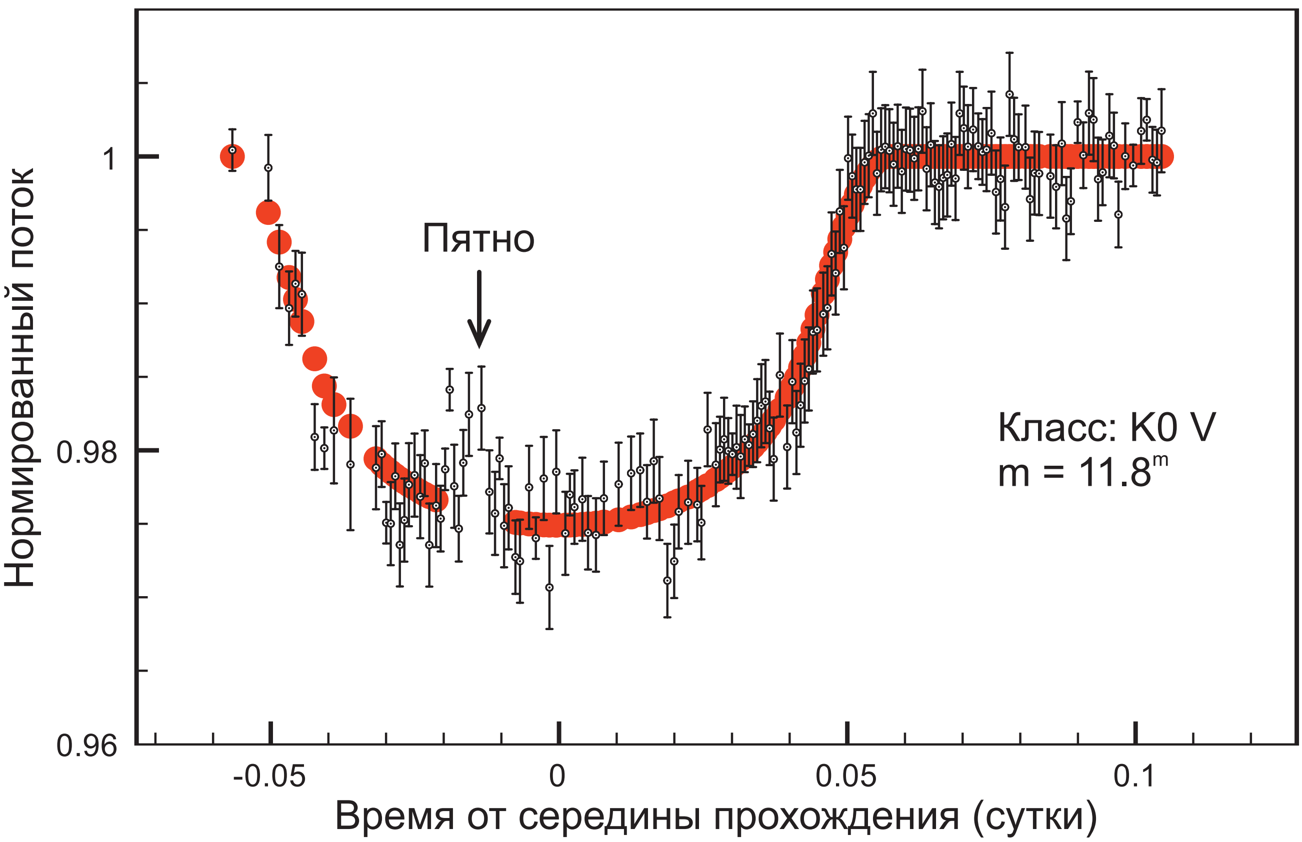
13 марта

---

11 класс

Вам дана кривая блеска (в оптическом диапазоне) затмения некоторой звезды своей планетой, которая принадлежит классу горячих Юпитеров. По графику заметно, что планета проходит по холодному пятну на диске звезды (пометка «пятно»). Известно, что видимая звездная величина звезды составляет $m = 11^m.8$, звезда принадлежит к классу K0 V, а если бы на ней не было пятна, то нормированный поток от нее был бы равен $F = 1.015$.

Считая пятно круглым и бóльшим, чем планета, определите температуру и радиус пятна, а также радиус планеты.



Решение:

Нам дана звезда класса K0 V. Необходимо вспомнить диаграмму Герцшпрунга-Рассела и по ней определить, что температура звезд подобного класса лежит в пределах примерно от 4500 до 5500 K, так что можно принять температура звезды $T = 5 \cdot 10^3$ K (реальное значение 5250 K, так что наша оценка вполне удовлетворительная). Абсолютная звездная величина лежит в пределах от 6^m до 7^m, поэтому для простоты счета возьмем $M = 6.8^m$.

По формуле Погсона определяется светимость звезды L:

$$L = L_\odot \times 10^{0.4(M_\odot - M)} = 10^{-0.8} L_\odot \approx 0.16 L_\odot. \quad (1)$$

Здесь $M_\odot = +4.8^m$ — абсолютная звездная величина Солнца.

Продолжая сравнивать звезду с Солнцем, получим ее радиус R:

$$\frac{L}{L_\odot} = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4} \qquad \Rightarrow \qquad R = \sqrt{\frac{L}{L_\odot}} \left(\frac{T_\odot}{T}\right)^2 R_\odot = 10^{-0.2} \left(\frac{6}{5}\right)^2 R_\odot \approx 0.57 R_\odot, \tag{2}$$

где $R_\odot = 7 \times 10^5$ км и $T_\odot = 6000$ К — радиус и температура фотосферы Солнца соответственно, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\ K^4}$ — постоянная Стефана-Больцмана.

Необходимо понять, что собой представляют величины на графике, то есть что такое нормированный поток. Если звезда обладает светимостью L, то освещенность E на расстоянии D от нее будет равна $E = \frac{L}{4\pi D^2}$. Так как на процессы на звезде расстояние до нее никак не влияет, то можно определять относительную освещенность: взять за некоторый «стандарт» освещенность E_0 и на нее поделить, т.е. нормировать. Но эта освещенность создается некоторой «стандартной» светимостью L_0. Получим, что нормированный поток $F = \frac{E}{E_0} = \frac{4\pi D^2 L}{4\pi D^2 L_0} = \frac{L}{L_0}$. Однако стандарт L_0 нам известен неточно, поэтому можно найти отношение двух известных потоков F_i и F_j. Тогда неизвестное значение «стандартного» потока сократится: $\frac{F_i}{F_j} = \frac{L_i}{L_j}$.

Потемнением диска звезды к краю можно пренебречь, т.к. эффекты, связанные с ним, были бы значимы, если бы покрытие планетой пятна происходило бы далеко от центра диска звезды. Далее нужно сообразить, что в общий поток входят потоки от звезды, планеты и пятна. Но излучением планеты можно пренебречь, т.к. характерная температура атмосфер горячих Юпитеров относительно невелика ($\approx (1 \div 2) \cdot 10^3$ К), поток пропорционален четвертой степени температуры, поэтому заметного излучения, тем более в видимой части спектра, не дает. Обозначим через F_1 нормированный поток от звезды без пятна (пятно «вырезает» часть звезды) плюс поток от пятна (вырезанная часть) — это максимальный наблюдаемый поток. На него производилась нормировка, т.к. из графика очевидно, что $F_1 = 1$. F_2 = звезда без пятна плюс часть пятна, не закрытая планетой — это поток в точке под пометкой «пятно». Из графика берем значение $F_2 = 0.985$. Поток $F_3 = 0.975$ — звезда без пятна и без планеты + пятно, т.е. это самая низкая точка на графике. Низкая точка, отмеченная красным (то есть модельная кривая), лишь одна, но по измерениям видно, что некоторый линейный тренд все же есть. Таким образом, размер планеты заметно меньше размеров звезды.

Радиус R и температура T звезды уже нами оценены. Радиус планеты обозначим как r, а радиус и температуру пятна — ρ и τ. Все три объекта будем считать абсолютно черными телами. Тогда можно записать систему уравнений на отношения потоков, которую надо решить (коэффициент 4π и постоянная Стефана-Больцмана сократились):

$$\begin{cases} \dfrac{F_1}{F_0} R^2 T^4 = (R^2 - \rho^2) T^4 + \rho^2 \tau^4 \\ \dfrac{F_2}{F_0} R^2 T^4 = (R^2 - \rho^2) T^4 + (\rho^2 - r^2) \tau^4 \\ \dfrac{F_3}{F_0} R^2 T^4 = (R^2 - \rho^2 - r^2) T^4 + \rho^2 \tau^4 \end{cases} \tag{3}$$

Излучающую поверхность звезды, пятна и планеты считаем дисками, т.к. потемнением к краю мы пренебрегли. Планета также затмевает круглую область звезды.

Перепишем систему иначе, выделив «общую часть» для наглядности:

$$\begin{cases} \dfrac{F_1}{F_0} R^2 T^4 = (R^2 - \rho^2) T^4 + \rho^2 \tau^4 \\ \dfrac{F_2}{F_0} R^2 T^4 = (R^2 - \rho^2) T^4 + \rho^2 \tau^4 - r^2 \tau^4 \\ \dfrac{F_3}{F_0} R^2 T^4 = (R^2 - \rho^2) T^4 + \rho^2 \tau^4 - r^2 T^4 \end{cases} \tag{4}$$

Если вычесть из первого уравнения третье, то получим выражение для радиуса планеты:

$$r^2T^4 = \frac{F_1 - F_3}{F_0} R^2 T^4 \qquad \Rightarrow \qquad r = R\sqrt{\frac{F_1 - F_3}{F_0}} \approx 0.16R = 0.09R_\odot \approx 6.3 \times 10^4 \text{ км.} \tag{5}$$

Вычитаем из первого второе — получаем температуру пятна. Также лучше выполнить подстановку выражения для радиуса планеты (5), тогда получится, что искомая величина зависит лишь от величин на графике и оцененной температуры фотосферы звезды:

$$r^2\tau^4 = \frac{F_1 - F_2}{F_0} R^2 T^4 \qquad \Rightarrow \qquad \tau = T\sqrt[4]{\frac{(F_1 - F_2)R^2}{F_0 r^2}} = T\sqrt[4]{\frac{F_1 - F_2}{F_1 - F_3}} = T\sqrt[4]{\frac{15}{25}} \approx T\sqrt{\frac{4}{5}} = 4450K. \tag{6}$$

В первом уравнении системы (4) теперь известны все величины, кроме радиуса пятна ρ. Значит:

$$\frac{F_1}{F_0} R^2 T^4 = (R^2 - \rho^2)T^4 + \rho^2\tau^4 \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \sqrt{\frac{R^2T^4 - \frac{F_1}{F_0}R^2T^4}{T^4 - \tau^4}} = R\sqrt{\frac{(F_1 - F_3)(F_0 - F_1)}{F_0(F_2 - F_3)}}. \tag{7}$$

Осталось подставить числа:

$$\rho = R\sqrt{\frac{0.025 \cdot 0.015}{1.015 \cdot 0.010}} = R \cdot \frac{0.5}{0.1}\sqrt{\frac{0.015}{10.15}} \approx 5R\sqrt{\frac{0.16}{101.5}} \approx 0.2R \approx 8 \times 10^4 \text{ км.} \tag{8}$$

М.В. Костина, В.В. Григорьев